# 二項分布とその極限
## －正規分布とポアソン分布－

渡邉 俊夫

# 二項分布

発生確率が $p$ の事象を独立に $n$ 回試行したとき、その事象が $k$ 回起こる確率は

$$P(k) = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\cdots\cdot 1}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = {}_nC_k\, p^k(1-p)^{n-k}$$

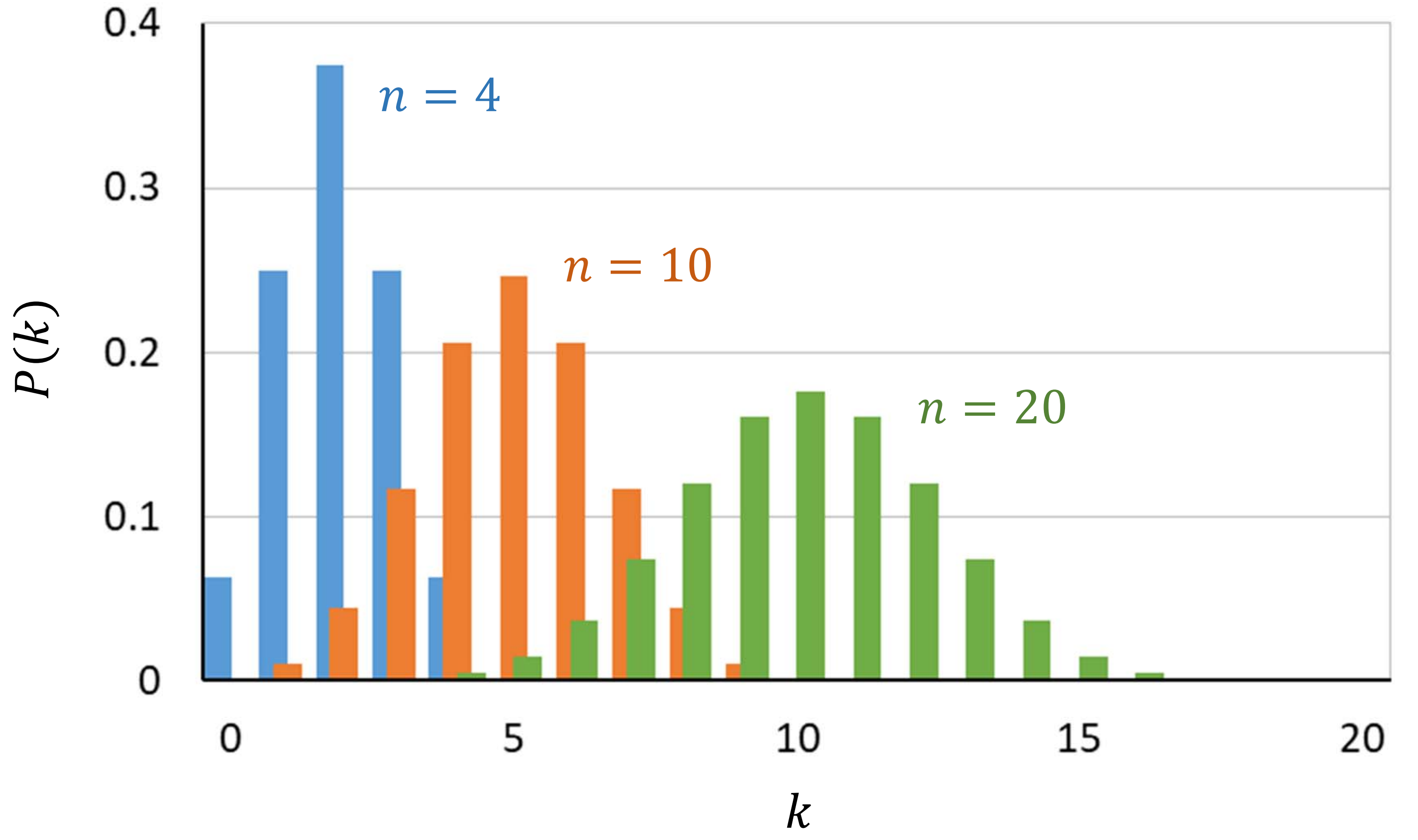
で表される。この離散確率分布を二項分布という。ここで、

$${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

は異なる $n$ 個のうちから $k$ 個を（重複なく）選ぶ組合せの数である。

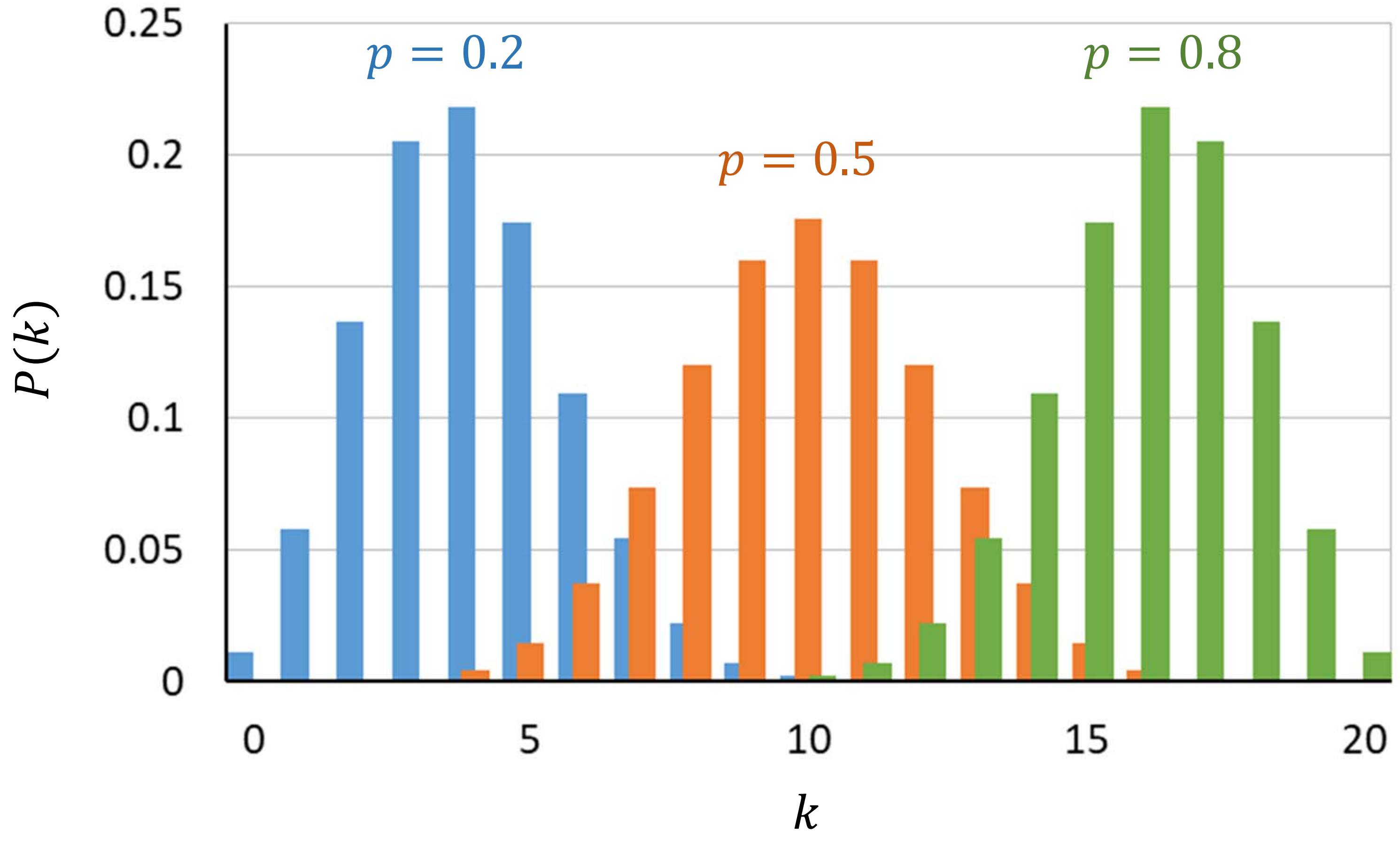
# 二項分布

$p = 0.5$ のとき、$n = 4, 10, 20$ の二項分布は下図のようになる。



# 二項分布

$n = 20$ のとき、$p = 0.2, 0.5, 0.8$ の二項分布は下図のようになる。



# 二項分布の確率の総和

二項分布の確率の総和は

$$\sum_{k=0}^{n} P(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \left(p + (1-p)\right)^n = 1$$

になっている。ここで、二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^k b^{n-k}$$

を用いた。

# 二項分布の平均

二項分布における発生回数 $k$ の平均は

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} kP(k) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!\,\big((n-1)-k'\big)!} p^{k'} (1-p)^{(n-1)-k'}$$

$$= np \cdot \big(p + (1-p)\big)^{n-1} = np$$

である。

# 二項分布の2乗平均

二項分布における発生回数 $k$ の2乗平均は

$$\overline{k^2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(k) + \sum_{k=0}^{n} kP(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} + \bar{k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} + np$$

# 二項分布の2乗平均

ここで、第1項は

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdot(n-2)!}{(k-2)!\big((n-2)-(k-2)\big)!} p^2 \cdot p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k'!\big((n-2)-k'\big)!} p^{k'} (1-p)^{(n-2)-k'}$$

$$= n(n-1)p^2 \cdot \big(p+(1-p)\big)^{n-2} = n(n-1)p^2$$

となる。

# 二項分布の2乗平均

したがって、二項分布における発生回数 $k$ の2乗平均は

$$\overline{k^2} = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(k) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(k) + \sum_{k=0}^{n} kP(k)$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$$= n^2p^2 + np(1-p)$$

である。

# 二項分布の分散

分散は「2乗平均」と「平均の2乗」との差で求められるから、
二項分布における発生回数 $k$ の分散は

$$
\begin{aligned}
V(k) &= \overline{k^2} - \bar{k}^2 \\
&= \left(n^2p^2 + np(1-p)\right) - (np)^2 \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

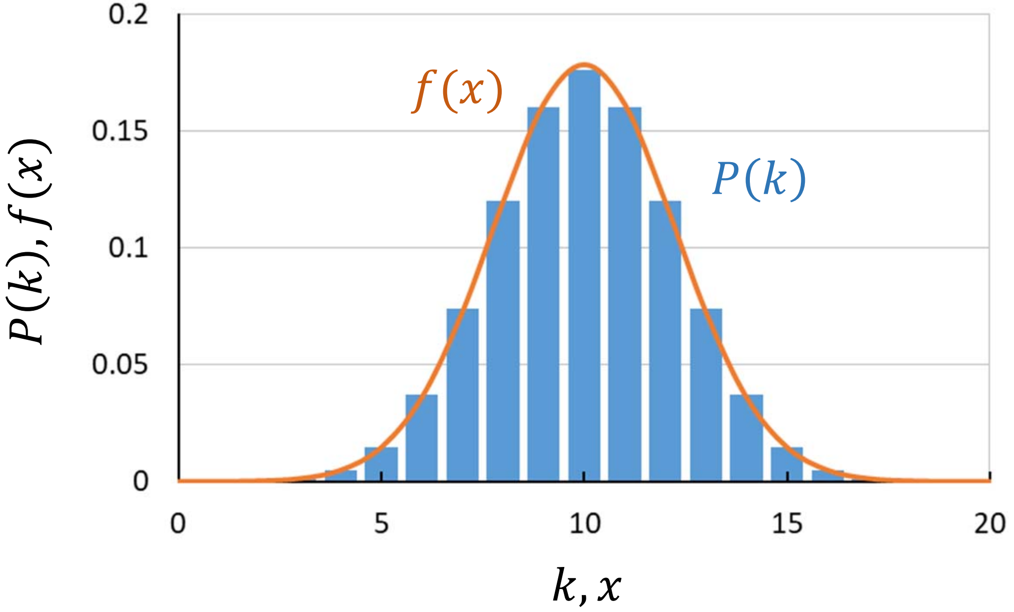
である。

# 正規分布

二項分布の確率は試行回数 $n$ が大きく、かつ $\bar{k} = np \gg 1$ のとき、

$$P(k) \approx f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

に近づく。ここで、$f(x)$ は $x$ を連続変数とする確率密度関数であり、$\mu = np$、$\sigma^2 = np(1-p)$ である。この確率分布を正規分布という。




$n = 20$
$p = 0.5$

$\mu = np = 10$
$\sigma^2 = np(1-p) = 5$

# 二項分布から正規分布へ

二項分布

$$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

より

$$P(k+1) = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$$

であるから

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

# 二項分布から正規分布へ

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

より

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} - 1 = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} - 1 = \frac{(n-k)p-(k+1)(1-p)}{(k+1)(1-p)}$$

$$= \frac{(n+1)p-(k+1)}{(k+1)(1-p)} = -\frac{(k+1)-(n+1)p}{(k+1)(1-p)}$$

ここで、$n \gg 1, k \gg 1$ とすると

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} - 1 \approx -\frac{k-np}{k(1-p)}$$

# 二項分布から正規分布へ

$$\frac{P(k+1)}{P(k)}-1\approx-\frac{k-np}{k(1-p)}$$

$\delta=k-np$ とおき、$|\delta|\ll np$ とすると

$$\frac{P(k+1)}{P(k)}-1\approx-\frac{\delta}{(np+\delta)(1-p)}=-\frac{\delta}{np\left(1+\frac{\delta}{np}\right)(1-p)}$$

$$=-\frac{\delta}{np(1-p)}\left(1-\frac{\delta}{np}+\cdots\right)$$

$$\approx-\frac{\delta}{np(1-p)}=-\frac{k-np}{np(1-p)}$$

# 二項分布から正規分布へ

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} - 1 \approx -\frac{k-np}{k(1-p)} \approx -\frac{k-np}{np(1-p)}$$

二項分布の平均 $\mu = np$、分散 $\sigma^2 = np(1-p)$ を用いると

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} - 1 \approx -\frac{k-\mu}{\sigma^2}$$

$$\therefore \frac{P(k+1) - P(k)}{P(k)} \approx -\frac{k-\mu}{\sigma^2}$$

離散分布 $P(k)$ を連続分布 $f(x)$ に変換すると

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

# 二項分布から正規分布へ

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$\Delta x \to 0$ とすると

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

両辺を積分して、$x = \mu$ で $f(\mu) = C$ とすると

$$\log f(x) - \log C = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\therefore f(x) = Ce^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

となる。

# 二項分布から正規分布へ

$f(x) = Ce^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ の定数 $C$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx = C\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2/2}dX = C\sigma I = 1$$

より定まる。ここで、$X = (x-\mu)/\sigma$ であり、定積分 $I$ の2乗は

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2/2}dX\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2/2}dX \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y^2/2}dY$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(X^2+Y^2)/2}dX\,dY = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr = 2\pi\left[\left(-e^{-r^2/2}\right)\right]_0^{\infty} = 2\pi$$

# 二項分布から正規分布へ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx = C\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2/2}dX = 1$$

および

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2/2}dX = \sqrt{2\pi}$$

より、$C = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ であるから

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

となり、正規分布が得られる。

# 正規分布の平均

正規分布の平均は

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X e^{-X^2/2} dX + \mu \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2/2} dX$$

$$= \mu$$

である。

# 正規分布の分散

正規分布の分散は

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X^2 e^{-X^2/2} dX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot X e^{-X^2/2} dX$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ X \cdot \left(-e^{-X^2/2}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-e^{-X^2/2}\right) dX$$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2/2} dX = \sigma^2$$

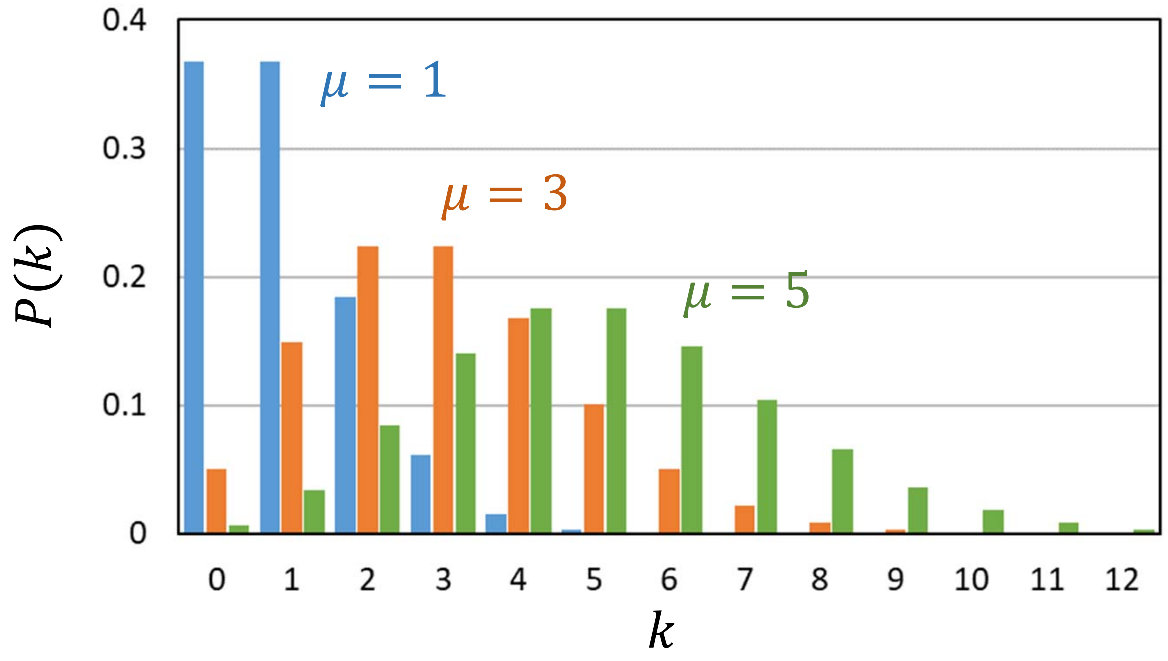
である。

# ポアソン分布

二項分布の確率は試行回数 $n$ が大きく、かつ発生確率 $p$ が小さいとき、

$$P(k) \approx \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

に近づく。ここで、$\mu = np$ である。この確率分布を**ポアソン分布**という。



# 二項分布からポアソン分布へ

二項分布

$$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

において $p \ll 1$ とすると、$n \gg k$ だから

$$P(k) \approx \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^n = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^n$$

ここで、$\mu = np$ とおくと

$$P(k) \approx \frac{\mu^k}{k!} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n$$

# 二項分布からポアソン分布へ

$$P(k) \approx \frac{\mu^k}{k!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n$$

において、$e$ の定義

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

を用いると

$$P(k) \approx \frac{\mu^k}{k!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \approx \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

となり、ポアソン分布が得られる。

# ポアソン分布の確率の総和

ポアソン分布の確率の総和は

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} = 1$$

になっている。ここで、$e^x$ のマクローリン展開

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

を用いた。

# ポアソン分布の平均

ポアソン分布における発生回数 $k$ の平均は

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{\infty} kP(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = e^{-\mu}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!}$$

$$= e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} = \mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \mu$$

である。

# ポアソン分布の2乗平均

ポアソン分布における発生回数 $k$ の2乗平均は

$$\overline{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\mu^k}{k!} + e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\mu^k}{k!}$$

$$= e^{-\mu} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-2)!} + e^{-\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!}$$

$$= \mu^2 + \mu$$

である。

# ポアソン分布の分散

分散は「2乗平均」と「平均の2乗」との差で求められるから、
ポアソン分布における発生回数 $k$ の分散は

$$V(k) = \overline{k^2} - \bar{k}^2$$
$$= (\mu^2 + \mu) - \mu^2$$
$$= \mu$$

である。

# まとめ

- 発生確率が $p$ の事象を独立に $n$ 回試行したとき、その事象が $k$ 回起こる確率は、二項分布

$$P(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

にしたがう。二項分布における発生回数 $k$ の平均は $\bar{k} = np$、分散は $V(k) = np(1-p)$ である。

- 二項分布の確率は試行回数 $n$ が大きく、かつ $\bar{k} = np \gg 1$ のとき、$x$ を連続変数とする正規分布の確率密度関数に近づき、

$$P(k) \approx f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

で表される。ここで、$\mu = np$、$\sigma^2 = np(1-p)$ である。

# まとめ

➢ 二項分布の確率は試行回数 $n$ が大きく、かつ発生確率 $p$ が小さいとき、平均 $\bar{k} = np = \mu$ のポアソン分布

$$P(k) \approx \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

に近づく。ポアソン分布における発生回数 $k$ の分散は $V(k) = \mu$ である。

参考文献

・薩摩順吉「確率・統計」（理工系の数学入門コース）岩波書店、1989.